Chapitre 4

# PROBABILITES CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle est la plus importante, mais aussi la plus délicate de la théorie des probabilités. Elle est introduite en particulier chaque fois que, pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information partielle “de dernière minute” est fournie à l'expérimentateur. Un événement en conditionne un autre, si la réalisation de ce dernier dépend de la réalisation du premier. Les notions d'indépendance et de conditionnement sont donc étroitement liées.

## I- INTRODUCTION.

Soit $(\Omega, A, P)$ un espace probabilisé. Envisageons, par exemple, les deux problèmes suivants :

***Problème 1* :**

**1)** On lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

**2)** On lance un dé et on obtient un chiffre impair. Quelle est la probabilité que ce soit le chiffre 3 ?

Dans le cas 1), on répond 1/6, mais dans le cas 2), on répond 1/3.
Pour modéliser le cas 2), on peut prendre $\Omega' = \{1, 3, 5\}$, muni de l'équiprobabilité (probabilité $P'$ telle que $P'(\{1\}) = P'(\{3\}) = P'(\{5\}) = 1/3$).

Mais on peut prendre aussi $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, muni de la probabilité Q telle que : $Q(\{1\}) = Q(\{3\}) = Q(\{5\}) = 1/3$ et $Q(\{2\}) = Q(\{4\}) = Q(\{6\}) = 0$.

Cette façon de procéder à l'avantage de conserver le même univers que dans le cas 1) et de montrer que la différence entre 1) et 2) est liée à un changement de probabilités.

***Problème 2* :**

Au cours d'une fête foraine, on veut étudier le résultat d'une loterie où il n'y a qu'un numéro gagnant parmi 100. On prend $\Omega = \{1, \cdots, 100\}$ et $P$ l'équiprobabilité sur $\Omega$.

Supposons que l'astrologue de la fête nous assure que le numéro gagnant se termine par un 4 : cette information modifie la loi de probabilité sur $\Omega$ : il y a 10 numéros se terminant par 4, chacun ayant la même chance de sortir (1/10) ; les autres n'ont aucune chance de sortir.

**Approche fréquentielle de la notion de probabilité conditionnelle :**

Soit E une expérience aléatoire et soient A et B deux événements liés à E. On répète N fois l'expérience. Parmi les $N_B$ fois où B est réalisé, il y a eu $N_{A\cap B}$ expériences où A et B ont eu lieu simultanément : la fréquence de A quand B a lieu est donc :

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_B}{N}} = \frac{f_{A\cap B}}{f_B}$$

**Définition 4.1 :** Soit $B \in \mathscr{A}$ tel que $P(B) > 0$. On appelle **probabilité de** *A* **sachant** *B* le nombre $P^B(A)$ (ou $P(A/B)$) défini par $P^B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

**Remarque :** On préfèrera la notation $P(A/B)$ lorsque l'expression de *B* est trop "longue" pour la mettre en exposant.

*Exemple* :

**1)** Dans le problème 1) on note *A* "on obtient le chiffre 3" et *B* "on obtient un chiffre impair". Calculer $P^B(A)$ ?

$$P^B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}}{card(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

**Propriété 4.1 :** L'application $P^B: A \mapsto P^B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

i) Pour toute suite d'événements *An*, incompatibles 2 à 2, les événements $An \cap B$ sont aussi incompatibles 2 à 2 et on a, en utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion dénombrable, puis le fait que *P* est une probabilité :

$$P^B\left(\bigcup_n A_n\right) = \frac{P\big((\cup_n A_n)\cap B\big)}{P(B)} = \frac{P(\cup_n (A_n\cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{\sum_n P(A_n\cap B)}{P(B)} = \sum_n P^B(A_n)$$

**Conséquence importante :** $P^B(\bar{A}) = 1 - P^B(A)$

**Probabilités conditionnelles et indépendance :**

**Théorème 4.1 :** Si *A* et *B* sont deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors

$$P^B(A) = P(A) \quad \text{et} \quad P^A(B) = P(B)$$

**Preuve :** Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $P(A \cap B)$= P(A).P(B) donc $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P\ (A)$ c'est-à-dire $P^B(A) = P\ (A)$ et de même $P^A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}) = P\ (B)$.

*Exemples* :

**a)** Quelle est la probabilité que les 2 enfants d'une même famille soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?

On note $A$ l'événement "2 garçons" et $B$ l'événement "l'aîné est un garçon".

$A \cap B = A$ car $A \subset B$, donc $P^B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

**b)** On a 3 pièces : l'une a les 2 faces rouges, l'autre les 2 faces blanches et la dernière 1 face rouge et 1 face blanche. On tire au hasard l'une des trois pièces et on constate que la face visible est rouge. Quelle est la probabilité pour que l'autre face soit rouge ?

On note $A$ l'événement "les 2 faces sont rouges" : $P\ (A) = \frac{1}{3}$ et $B$ l'événement "la face visible est rouge $P\ (B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (en effet, il y a 6 faces visibles possibles, dont 3 rouges).

On a encore ici $A \cap B = A$ car $A \subset B$ donc $P^B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

**4.2 PROBABILITES COMPOSEES**

On déduit facilement de la définition de la probabilité conditionnelle que, si $A$ et $B$ sont deux événements de probabilité non nulle, $P(A \cap B) = P^B(A).P\ (B) = P^A(B).P\ (A)\ \ P$). Plus généralement,

**Théorème 4.2 :** Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ; alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P\left({A_2}/{A_1}\right) \ldots\ P\left({A_2}/{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\right)$$

*Exemples* :

**a)** Soient 2 urnes $U_1$ et $U_2$ contenant initialement chacune 2 boules noires et 3 blanches. On tire dans $U_1$ une boule, on note sa couleur, on la remet dans $U_2$. On tire ensuite une boule dans $U_2$. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois une boule noire ?

Solution :

On note $N_1$ l'événement "la première boule tirée est noire" et $N_2$ l'événement "la deuxième boule tirée est noire" et on cherche $P(N_1 \cap N_2)$

On a, d'après le théorème 4.2, $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P^{N_1}(N_2)$. Or $P(N_1) = \frac{2}{5}$ et $P(N_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Finalement,

$$P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

**b)** Un conducteur sobre a 1 chance sur 1000 d'avoir un accident de voiture tout seul au cours d'une période donnée alors qu'un conducteur ivre a 1 chance sur 50. On admet qu'1 conducteur sur 100 est ivre. Quelle est la probabilité qu'il y ait un accident individuel et que le conducteur soit ivre ?

Solution :

On note $A$ l'événement "il y a un accident" et $I$ l'événement "le conducteur est ivre". On cherche $P(A \cap I)$

On a : $P(A \cap I) = P(I) \times P^I(A)$ avec $P(I) = \frac{1}{100}$ et $P^I(A) = \frac{1}{50}$

Donc

$$P(A \cap I) = \frac{1}{5000}$$

## 4.3 FORMULE DES PROBABILITES TOTALES.

**Théorème 4.3 :** Soit $(B_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$ ,

$$P\,(A) = \sum_i P^{B_i}(A).P\,(B_i)$$

**Cas particulier très utile :** $P(A) = P^B(A)P(B) + P^{\bar{B}}(A)P(\bar{B})$.

En effet, $(B, B)$ forme un système complet d'événements de $\Omega$.

*Exemples* :

**a)** Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion $p$ de tricheurs. On fait tirer 1 carte d'un jeu de 52 à cet individu et on admet que, si c'est un tricheur, il est sûr de retourner un as. Quelle est la probabilité qu'il retourne un as ?

Solution :

On note $A$ l'événement "l'individu retourne un as" et $T$ l'événement "l'individu est un tricheur" et on cherche $P(A)$.

On sait que $P\ (A) = \text{p}$ ; $P^T(A) = 1$ et $P^{\bar{T}}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

D'après le théorème 4.3, on a

$$P\ (A) = P^T(A) \times P\ (T) + P^{\bar{T}}(A) \times P\ (\bar{T})$$

$$P\ (A) = \frac{1 + 12\text{p}}{13}$$

## 4.4 THEOREME DE BAYES.

**Théorème 4.4 :** Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et $A$ un événement de probabilité non nulle. Alors, pour tout $i_0 \in I$ :

$$P^A(B_{i0}) = \frac{P^{B_{i0}}(A).P\ (B_{i0})}{\sum_i P^{B_i}(A).P\ (B_i)}$$

**Cas particulier très important :**

$$P^A(B) = \frac{P^B(A).P\ (B)}{P^B(A).P\ (B) + P^{\bar{B}}(A).P\ (\bar{B})}$$

*Exemples* :

**a)** On reprend les conditions de l'exemple 4.2.c). Quelle est la probabilité qu'un conducteur soit ivre sachant qu'il a eu un accident ?

On note :

**A :** l'événement "il y a un accident"

**I :** l'événement "le conducteur est ivre"

On cherche ici $P^A(I)$. D'après le théorème de Bayes on a :

$$P^A(I) = \frac{P^I(A).P\ (I)}{P^I(A).P\ (I) + P^{\bar{I}}(A).P\ (\bar{I})}$$

$$P^A(I) = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \times \frac{99}{100}} = \frac{20}{119}$$